

# Influence des B-splines non uniformes sur l'erreur de reconstruction d'un signal

N. Chihab<sup>1</sup>      A. Zergainoh<sup>1</sup>      P. Duhamel<sup>2</sup>      J-P. Astruc<sup>1</sup>

<sup>1</sup> L2TI, Institut Galilée, Université Paris 13,  
99, Avenue Jean Baptiste Clément, 93 430 Villetaneuse, France  
 [{chihab,zergainoh,astruc}@l2ti.univ-paris13.fr](mailto:{chihab,zergainoh,astruc}@l2ti.univ-paris13.fr)

<sup>2</sup> LSS, Supelec,  
Plateau de Moulon, 91 192 Gif sur Yvette, France  
 [pierre.duhamel@lss.supelec.fr](mailto:pierre.duhamel@lss.supelec.fr)

## Résumé

*Dans cet article, nous nous intéressons au problème de la reconstruction d'un signal à partir de ses échantillons prélevés à des instants irréguliers et connus. Nous étudions la représentation d'un signal par des fonctions polynomiales par morceaux appelées fonctions splines. La fonction spline requière la construction d'une base constituée par des fonctions B-splines non uniformes. La base dépend du degré de la fonction spline, de la longueur de la séquence de nœuds et de la multiplicité imposée en chaque nœud. Ainsi, de nombreuses bases peuvent être construites. Nous analysons l'impact de ces bases sur la qualité du signal reconstruit. Dans le cas d'une interpolation non uniforme, le calcul des erreurs de reconstruction montre que la base construite uniquement à partir de deux nœuds consécutifs, présente de meilleures performances que celle construite à partir de plusieurs nœuds consécutifs.*

## Mots clefs

Spline, B-spline non uniforme, interpolation, approximation, échantillonnage irrégulier.

## 1 Introduction

Plusieurs méthodes d'interpolation ont été proposées dans le cadre de la reconstruction d'un signal continu à partir de données discrètes [1] et [2]. Les fonctions d'interpolation, polynomiales par morceaux, basées sur les B-splines uniformes ont eu un grand succès. Unser et al ont ensuite développé des méthodes de reconstruction de signaux discrets à partir d'un échantillonnage uniforme [2]. Dans cet article, nous considérons le problème de la reconstruction d'un signal discret à partir d'une répartition irrégulière de ses échantillons. Nous supposons que les instants d'échantillonnage sont connus et sont des multiples entiers d'une période d'échantillonnage sous-jacente du signal. Nous nous intéressons à la représentation d'un signal par des fonctions polynomiales par morceaux appelées fonctions splines.

Nous organisons cet article comme suit. La section 2 introduit tout d'abord les fonctions splines non uniformes. Nous rappelons les principales propriétés des fonctions B-splines non uniformes. Nous nous focalisons sur trois types de séquences de nœuds afin de construire les différentes bases de la spline. La section 3 présente la méthode de reconstruction fondée sur les fonctions splines. Les erreurs d'approximation sont calculées afin d'étudier l'influence des différentes bases sur la qualité du signal reconstruit. La section 4 présente quelques résultats de simulations.

## 2 Les fonctions splines non uniformes

La fonction spline de degré  $k$ , associée à une séquence de nœuds  $t$ , est obtenue par la combinaison linéaire de fonctions B-splines non uniformes  $\{B_{j,k}(x)\}$ , pondérées par des coefficients  $\{a_j\}$  :

$$f(x) = \sum_j a_j B_{j,k}(x)$$

La  $j$ -ème fonction B-spline non uniforme, notée  $B_{j,k}(x)$ , est obtenue à partir des différences divisées appliquées à la fonction  $(-x)_+^k$ , pour tout  $x \in R$  [3] et [4] :

$$B_{j,k}(x) = (t_{j+k+1} - t_j)[t_j, \dots, t_{j+k+1}](-x)_+^k$$

Un nœud quelconque  $t_j$  est dit multiple d'ordre  $\mu_j$ , ou de multiplicité  $\mu_j$ , s'il apparaît  $\mu_j$  fois dans la séquence de nœuds considérée. Dans ce cas, la fonction B-spline est de classe  $C^{\mu_j-1}$  au nœud  $t_j$ . La condition de continuité des dérivées d'ordre  $r_j - 1$  est étroitement liée à la multiplicité du nœud  $t_j$  par l'équation suivante :

$$r_j + \mu_j = k + 1$$

On note  $\prod_{k,t,r}$  l'espace vectoriel des polynômes de degré  $k$  par morceaux, avec un raccord de classe  $C^{r-1}$  au nœud  $t_j$ . La dimension de cet espace est donnée par l'équation suivante, [3] et [4] :

$$n = (k+1)l - \sum_{i=2}^l r_i$$

où  $l$  représente le nombre d'intervalles  $[t_j, t_{j+1}]$  contenu

dans la séquence de nœuds considérée. L'ensemble des  $n$  B-splines  $\{B_{j,k}, \dots, B_{j+n-1,k}\}$  non uniformes de degré  $k$  forment une base de l'espace  $\Pi_{k,r}$ , [3] et [4].

Pour un degré  $k$  donné, l'équation ci-dessus montre que les éléments et la dimension de la base de la fonction spline sont liés à la longueur de la séquence de nœuds et à la multiplicité imposée en chaque nœud de la séquence. Pour un degré donné, il est clair que la fonction spline n'est pas unique.

On considère une séquence de nœuds sur un intervalle  $[a_i, b_i]$  ( $i=1,2,3$ ). Selon la multiplicité imposée en chaque nœud, nous proposons d'étudier les fonctions splines engendrées à partir de trois séquences suivantes :

• **Première séquence «Seq 1»** : Cette séquence est définie sur l'intervalle  $[a_1, b_1]$ . Tous les nœuds de cette séquence ont une multiplicité d'ordre 1 :

$$a_1 = t_1 < \dots < t_{k+1} < \dots < t_{n+1} < \dots < t_{n+k+1} = b_1$$

Dans ce cas, l'ensemble des  $k+1$  éléments B-splines  $\{B_{1,k}, \dots, B_{n,k}\}$  constituent une base sur l'intervalle restreint à  $[t_{k+1}, t_{k+2}]$ . C'est cette configuration qui a été retenue et étudiée dans le cas où la répartition des nœuds est uniforme [1] et [2].

• **Deuxième séquence «Seq 2»** : Une multiplicité d'ordre  $k+1$  est imposée aux premier et dernier nœuds de cette séquence. Tandis que les nœuds à l'intérieur de l'intervalle  $]a_2, b_2[$  ont une multiplicité d'ordre 1.

$$a_2 = t_1 = \dots = t_{k+1} < \dots < t_{n+1} = \dots = t_{n+k+1} = b_2$$

La combinaison des  $n$  B-splines  $\{B_{1,k}, \dots, B_{n,k}\}$ , sur l'intervalle  $[a_2, b_2]$ , constitue une base de la fonction spline. Sa dimension dépend du nombre de nœuds choisis à l'intérieur de la séquence.

• **Troisième séquence «Seq 3»** : Cette troisième séquence est composée uniquement de deux nœuds consécutifs. Chaque nœud a une multiplicité d'ordre  $k+1$ .

$$a_3 = t_1 = \dots = t_{k+1} < t_{n+1} = \dots = t_{n+k+1} = b_3$$

La combinaison des  $k+1$  B-splines  $\{B_{1,k}, \dots, B_{n,k}\}$  constitue une base de la fonction spline. La construction des  $k+1$  éléments de la base est généralisée pour n'importe quel degré de la spline [3] et [4]. Les  $k+1$  premiers nœuds (respectivement  $k+1$  derniers nœuds) sont renommés par  $\lambda_j$  (respectivement par  $\lambda_{j+1}$ ). Le calcul des éléments de la base se généralise ainsi à partir de l'équation suivante :

$$B_{i,k}(x) = C_k^i \left(1 - \frac{x - \lambda_j}{\lambda_{j+1} - \lambda_j}\right)^{k-i} \left(\frac{x - \lambda_j}{\lambda_{j+1} - \lambda_j}\right)^i$$

pour  $0 \leq i \leq k$  et  $\lambda_j \leq x \leq \lambda_{j+1}$ ,

où  $C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}$  représente le coefficient binomial.

### 3 La méthode de reconstruction

La méthode de reconstruction proposée repose sur l'interpolation d'un signal par des fonctions splines. Le problème consiste à trouver une fonction spline  $f$  qui approche le signal  $y(t)$  représenté par ses échantillons  $\{y(t_i)\}$ . Plusieurs questions se posent quant à la qualité du signal reconstruit : le choix du degré de la fonction spline, le calcul des coefficients des B-splines non uniformes ainsi que la sélection de la séquence sur laquelle la base est construite.

#### 3.1 Calcul des coefficients des B-splines

Le calcul des  $n$  coefficients des B-splines non uniformes est obtenu par la résolution d'un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues.

Nous imposons, d'une part,  $n-k+1$  conditions d'interpolation à la fonction spline :

$$f(t_i) = \sum_{j=m}^{n-m+1} a_j B_{j,k}(t_i) = y(t_i) \quad \text{pour } i = m, \dots, n-k+m$$

où  $m$  dépend de la séquence de nœuds choisie :

- $m = k+1$ , si la séquence choisie correspond à Seq 1,
- $m = 1$  si la séquence choisie correspond à Seq 2 ou Seq 3.

D'autre part, nous imposons  $k-1$  conditions aux dérivées d'ordre  $q$  de la fonction spline :

$$f^{(q)}(t_i) = \sum_{j=m}^{n-m+1} a_j B_{j,k}^{(q)}(t_i) = y^{(q)}(t_i)$$

pour  $i = m$  et  $i = n-k+1$ . L'ordre de la dérivée ( $q$ ) est déterminé par  $q = \lfloor (k-1)/2 \rfloor$  (où  $\lfloor \alpha \rfloor$  désigne la partie entière inférieure de  $\alpha$ ). Afin d'étudier l'influence de la base de la spline sur la reconstruction d'un signal, nous proposons de calculer les erreurs de reconstruction respectives aux différentes bases.

#### 3.2 Erreurs d'approximation

Introduisons quelques résultats classiques afin de calculer l'erreur de reconstruction. Pour mesurer la distance d'une fonction à un polynôme, rappelons que la norme uniforme d'une fonction  $g$  bornée, définie sur un intervalle  $[a, b]$ , est donnée par :

$$\|g\|_{[a,b]} = \sup_{a \leq x \leq b} |g(x)|$$

Supposons que la fonction  $g$  soit de classe  $C^{k+1}$  sur l'intervalle  $[a, b]$ . Rappelons que la distance de la fonction  $g$  à l'espace  $\pi_k$  des polynômes de degré  $\leq k$  est donnée par l'équation :

$$dist_{[a,b]}(g, \pi_k) = \inf_{p \in \pi_k} \|g - p\|_{[a,b]}$$

Cette distance est majorée par :

$$dist_{[a,b]}(g, \pi_k) = \|g - p\|_{[a,b]} \leq K_k h^{k+1} \|d^{k+1} g\|_{[a,b]}$$

où  $h = b - a$  et  $K_k = 1/[2^{k+1}(k+1)!]$  est une constante qui ne dépend que du degré  $k$  du polynôme [5].

Nous mesurons l'erreur de reconstruction par la distance entre le signal interpolé et l'espace de la fonction spline. Notons que les coefficients des B-splines interviennent dans le calcul de l'erreur de reconstruction. En effet, connaissant les propriétés des B-splines, la majoration de la fonction spline se ramène à :

$$|f(t)| \leq \left| \sum_{j=m}^{n-m+1} a_j B_{j,k}(t) \right| \leq \sum_{j=m}^{n-m+1} |a_j|$$

La résolution du système linéaire décrit à la section 3.1, montre que les coefficients des B-splines sont déterminés à partir d'une combinaison linéaire du signal (évalué en certains nœuds) et de ses dérivées (d'ordre  $q$  évaluées en certains nœuds) pondérés par la distance entre différents nœuds consécutifs. De plus, nous montrons que l'erreur de reconstruction, notée  $\varepsilon(k, n, Seq\ i) = \|y - f\|$ , dépend du degré  $k$  de la spline, de sa dimension  $n$  et de la séquence choisie  $Seq\ i$ . Nous n'étudions pas l'influence du degré de la spline sur l'erreur de reconstruction, puisque les résultats sont déjà connus. Lorsque le degré de la spline augmente, l'erreur de reconstruction diminue.

La méthode de reconstruction nécessite le calcul des dérivées d'ordre  $q$  évaluées au nœud  $t_j$ . Les majorants des erreurs de reconstruction sont déterminés en supposant que le calcul des dérivées aux nœuds  $t_j$  n'introduit pas d'erreurs. Présentons quelques exemples.

Pour un degré  $k$  fixé, nous avons vu que la fonction spline peut être représentée par différentes bases de mêmes dimensions ou de dimensions différentes selon la séquence choisie. Etudions tout d'abord l'influence de la dimension de la base. Notons  $h_i = t_{j+i} - t_{j+i-1}$  pour  $i = 1, \dots, n + k + 1$  et  $h = b - a$ .

Prenons une spline de degré 2 ( $k = 2$ ). Les bornes maximales des erreurs de reconstruction engendrées par des bases de différentes dimensions  $n = 3, 4, 5$  et 6 sont données par les relations suivantes :

- $\varepsilon(2,3, Seq\ 3) \leq \frac{7h_1^3}{48} \|d^3 y\|_{[a,b]} = \frac{7h^3}{48} \|d^3 y\|_{[a,b]}$
- $\varepsilon(2,4, Seq\ 2) \leq \left( \left( 4 + \frac{2h_2}{h_1} \right) \frac{h^3}{48} + (h_1 + h_2) \frac{h^2}{16} \right) \|d^3 y\|_{[a,b]}$
- $\varepsilon(2,5, Seq\ 2)$   
 $\leq \left( \left( 4 + \frac{2(h_2 + h_3)}{h_1} + \frac{2h_3}{h_2} \right) \frac{h^3}{48} + (h_1 + h_2 + h_3) \frac{h^2}{16} \right) \|d^3 y\|_{[a,b]}$

- $\varepsilon(2,6, Seq\ 2)$

$$\leq \left( \left( 4 + \frac{2(h_2 + h_3 + h_4)}{h_1} + \frac{2(h_3 + h_4)}{h_2} + 2\frac{h_4}{h_3} \right) \frac{h^3}{48} + (h_2 + h_3 + h_4) \frac{h^2}{16} \right) \|d^3 y\|_{[a,b]}$$

Nous constatons que le plus petit majorant de l'erreur de reconstruction est suscité par la base de plus petite dimension ( $n = 3$ ) construite à partir de la séquence 3. Ces résultats restent valables même pour des degrés de la spline supérieurs à 2.

Le degré de la spline étant toujours fixé, analysons maintenant l'effet de deux bases différentes mais de même dimension sur la reconstruction d'un signal. Cette situation se produit dans le cas où les bases sont construites à partir des séquences 1 et 3. Prenons un exemple où le degré de la spline est fixé à 2. Dans ce cas, la dimension de la base est égale à 3. C'est la plus petite dimension possible pour  $k = 2$ . Nous trouvons les majorants suivants :

- $\varepsilon(2,3, Seq\ 3) \leq \frac{7h_1^3}{48} \|d^3 y\|_{[a,b]} = \frac{7h^3}{48} \|d^3 y\|_{[a,b]}$

- $\varepsilon(2,3, Seq\ 1)$

$$\leq \left( \left( 4 + \frac{2h_4}{h_3} \right) \frac{h^3}{48} + (h_2 + h_3 + h_4) \frac{h^2}{16} \right) \|d^3 y\|_{[a,b]}$$

Nous constatons que l'erreur de reconstruction, dans le cas où la base est construite à partir de la séquence 3, est plus petite que celle engendrée par la séquence 1. Ce résultat reste valable même pour des degrés supérieurs de la spline.

## 4 Résultats des simulations

Nous présentons quelques résultats expérimentaux pour illustrer l'influence de la base de la fonction spline sur la qualité de la reconstruction d'un signal. Pour un degré 3 ( $k = 3$ ) de la fonction spline et pour différents pas d'échantillonnage, la Figure 1 compare les erreurs d'approximation maximales (en dB) engendrées par plusieurs bases de différentes dimensions sur la reconstruction d'un signal sinusoïdal. Les erreurs de reconstruction maximales sont marquées sur la Figure 1 par : 'o' pour  $n = 4$  (Seq 3) ; 'x' pour  $n = 5$  (Seq 2) ; '\*' pour  $n = 6$  (Seq 2) ; '+' pour  $n = 7$  (Seq 2).

Ces résultats de simulation ont été obtenus en approchant les dérivées d'ordre  $q$  par le biais de l'équation suivante :

$$y^{(q)}(t_i) = d^{(q)} y(t_i) / d^{(q)} t_i = d^{(q-1)} (y(t_{i+1}) - y(t_i)) / d^{(q-1)} (t_{i+1} - t_i)$$

Nous observons, sur la Figure 1, que la dimension de la base influe sur la qualité du signal reconstruit. En effet, la plus petite erreur de reconstruction est introduite par la spline de plus petite dimension ( $n = 4$ ).

Le signal sinusoïdal est ensuite échantillonné de manière aléatoire. Nous interpolons ce signal par une spline de degré 5 en utilisant les deux séquences de nœuds  $Seq\ 1$  et

Seq 3. Rappelons que, dans ce cas, les différentes bases ont la même dimension. La Figure 2 présente l'erreur maximale de reconstruction calculée en (dB) pour différents pourcentages d'échantillons à interpoler ; dans le cas où les dérivées d'ordre  $q$  du signal évaluées au nœud  $t_i$  sont données par :

- les dérivées analytiques (exactes) du signal ('\*' pour Seq 3 et '+' pour Seq 1) ;
- les dérivées d'un polynôme qui approche le signal sur le domaine de définition de chaque séquence ('o' pour Seq 1 et 'o' pour Seq 3) ;
- les dérivées selon l'équation  $y^{(q)}(t_i) = d^{(q)}y(t_i)/d^{(q)}t_i$  ('x' pour la Seq 1 et 'x' pour Seq 3).

La comparaison des erreurs de reconstruction, sur la Figure 2, montre bien qu'en ayant utilisé les dérivées exactes dans les deux cas de séquences Seq 1 et Seq 3, la spline construite à partir de la séquence 3 introduit une erreur moins importante que la spline construite à partir de la séquence 1.

Le Tableau 1 compare les informations nécessaires pour interpoler un signal à partir de chacune des 3 séquences, sur le même intervalle  $[t_{k+1}, t_{k+2}]$ . Prenons par exemple la fonction spline de degré 5. La séquence 1 utilise 12 nœuds pour construire les éléments de sa base, 2 échantillons, 2 dérivées premières et 2 dérivées secondes. Tandis que la séquence 3 n'utilise que 2 nœuds pour la construction de sa base, 2 échantillons, 2 dérivées premières et 2 dérivées secondes sur le même intervalle. Il est clair que la méthode de reconstruction basée sur la séquence 1 nécessite  $2k$  nœuds supplémentaires par rapport à la séquence 3.

Séquences	Nœuds	Echantillons	Dérivées
Seq 1	$2(k+1)$	2	$q = \lfloor (k-1)/2 \rfloor$
Seq 2	$n-k+1$	$n-k+1$	$q = \lfloor (k-1)/2 \rfloor$
Seq 3	2	2	$q = \lfloor (k-1)/2 \rfloor$

Tableau 1 - Comparaison des informations nécessaires pour la reconstruction en fonction de la séquence

## 5 Conclusion

Cette étude nous amène à choisir, parmi les différentes bases possibles de la spline, la base dont les éléments ont été construits uniquement à partir de deux nœuds consécutifs (Seq 3). En effet, l'erreur de reconstruction est moins importante comparée aux erreurs de reconstruction engendrées par les autres bases. De plus, le calcul explicite des éléments de cette base ainsi que ses coefficients sont généralisés quelque soit le degré de la fonction spline. Dans de futures perspectives de recherche, nous comptons étudier l'extension de ces méthodes de reconstruction dans le cas d'un signal bidimensionnel.

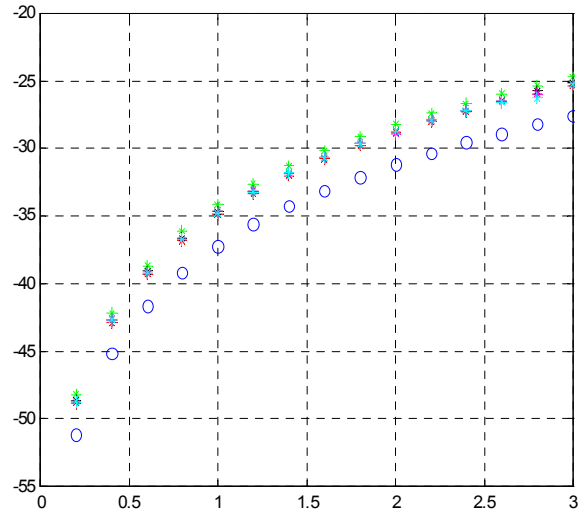


Figure 1 - Spline de degré 3 : Erreur de reconstruction (en dB) en fonction du pas d'échantillonnage (dérivées approchées).

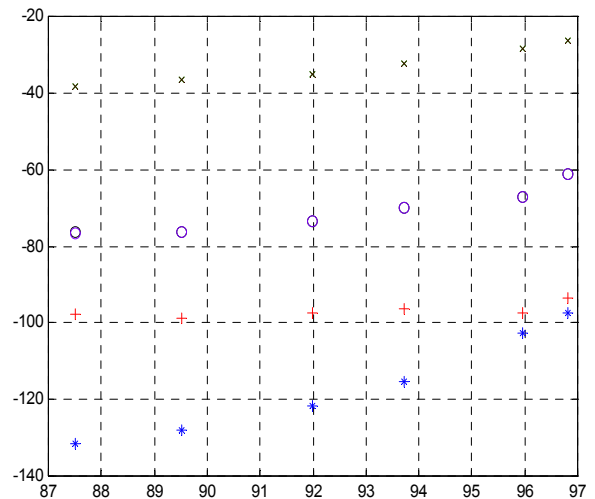


Figure 2 - Spline de degré 5 : Erreur maximale de reconstruction (en dB) en fonction du pourcentage d'échantillons à interpoler (dérivées exactes et approchées).

## Références

- [1] P. Thévenaz, T. Blu, M. Unser, Interpolation Revisited, IEEE Transactions on Medical Imaging, vol. 19, no. 7, pp. 739-758, July 2000.
- [2] M. Unser, A. Aldroubi, M. Eden, B-Spline Signal Processing: Part I—Theory, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 41, no. 2, pp. 821-833, February 1993.
- [3] C. De Boor, A practical guide to splines, revised edition, New York, springer-verlag, 2001.
- [4] J.-J. Risler. Méthodes mathématiques pour la CAO. Edition Masson, Paris, 1991.
- [5] T. Lyche, K. Mørken, Spline methods, Institute of Informatics, University of Oslo, Draft 2003.